Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = 2 \cdot (1-m)$.

Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m=1$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil.

c) Dacă $m=1$, sistemul are mulțimea soluțiilor $S_1 = \left\{ (x, 1, 2-x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ şi

$x^2 + 1^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 5$.

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 5$ are minimul $g(x_V) = g(1) = 3$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Dacă $X, Y \in G$, $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = 1$, deci $X \cdot Y \in G$.

Se verifică că dacă $X \in G$, atunci şi $X^{-1} \in G$.

c) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece $D^2 = 0_2$, obținem $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = (-1)^n \cdot I_2 + n \cdot (-1)^{n-1} \cdot D \neq I_2$.